

Ähnlichkeitstheorie

1 Ähnlichkeitstheorie	2
2 Dimensionslose Kennzahlen	2
2.1 Reynolds-Zahl	3
2.2 Prandtl-Zahl	3
2.3 Froude-Zahl	3
2.4 Bedeutung für die Massstabsübertragung	4
3 Anwendung in der Membrantechnik	4
4 Formelzeichen	6

1 Ähnlichkeitstheorie

Die Ähnlichkeitstheorie bildet eine zentrale Grundlage für die Übertragung von Versuchsergebnissen aus dem Modellmassstab auf industrielle Anwendungen in der Verfahrenstechnik. Sie ermöglicht es, physikalische Zusammenhänge zwischen Modell- und Realanlage systematisch zu beschreiben und zu quantifizieren. Die zugrunde liegende Idee besteht darin, dass zwei Systeme ähnlich sind, wenn sie in ihren dimensionslosen Kennzahlen übereinstimmen. Damit können Experimente unter kontrollierten Bedingungen im kleineren Massstab durchgeführt werden, um das Verhalten komplexer Prozesse im Originalmassstab vorherzusagen.

In der Praxis ist diese Vorgehensweise insbesondere in der chemischen und thermischen Verfahrenstechnik von grosser Bedeutung. Prozesse wie Destillation, Rühren, Filtration oder Wärmeübertragung werden häufig zuerst in Pilotanlagen untersucht, bevor sie in Produktionsanlagen umgesetzt werden. Eine korrekte Massstabsübertragung setzt voraus, dass geometrische, kinematische und dynamische Ähnlichkeiten zwischen Modell und Realität gewahrt bleiben. Diese drei Ähnlichkeitsformen stellen sicher, dass die wesentlichen physikalischen Kräfteverhältnisse erhalten bleiben und keine Verzerrungen in den Prozessparametern auftreten.

Zur mathematischen Beschreibung werden dimensionslose Kennzahlen wie die Reynolds-, Froude-, Prandtl- oder Nusselt-Zahl verwendet. Diese Zahlen fassen die relevanten physikalischen Grössen in kompakter Form zusammen und ermöglichen den Vergleich verschiedener Systeme unabhängig von ihren absoluten Dimensionen. Die Dimensionsanalyse nach Buckingham ist dabei ein etabliertes Werkzeug zur Herleitung solcher Kennzahlen. Sie reduziert die Zahl der unabhängigen Variablen und erlaubt eine systematische Untersuchung der Einflussgrössen.

Ein zentrales Ziel der Ähnlichkeitstheorie besteht darin, aus einer begrenzten Anzahl von Modellversuchen zuverlässige Vorhersagen für industrielle Prozesse abzuleiten. Dadurch können Entwicklungszeiten verkürzt, Kosten reduziert und Risiken bei der Massstabsvergrösserung minimiert werden. In der industriellen Praxis wird jedoch oft nur eine partielle Ähnlichkeit erreicht, da nicht alle Kennzahlen gleichzeitig konstant gehalten werden können. Hierbei sind ingenieurwissenschaftliches Urteilsvermögen und empirische Korrelationen entscheidend, um eine sinnvolle Balance zwischen theoretischer Genauigkeit und praktischer Umsetzbarkeit zu finden.

Neben den klassischen hydrodynamischen Anwendungen findet die Ähnlichkeitstheorie zunehmend auch in modernen Bereichen wie der Mikroverfahrenstechnik, der Umwelttechnik und der Bioprosesstechnik Anwendung. Dort müssen Prozesse auf stark unterschiedlichen Grössenskalen betrachtet werden, was die Einhaltung von Ähnlichkeitsbedingungen zusätzlich erschwert. Dennoch bleibt die Grundidee unverändert: Nur durch eine konsequente Berücksichtigung der dimensionslosen Zusammenhänge können experimentelle Ergebnisse verlässlich auf reale Systeme übertragen werden.

2 Dimensionslose Kennzahlen

Die Anwendung der Ähnlichkeitstheorie in der Verfahrenstechnik beruht auf der Identifikation und Verwendung dimensionsloser Kennzahlen. Diese Kennzahlen fassen komplexe physikalische Zusammenhänge in kompakter Form zusammen und erlauben den Vergleich verschiedener Systeme unabhängig von ihren geometrischen Abmessungen oder absoluten Grössen. Zu den wichtigsten Grössen zählen die Reynolds-, Prandtl- und Froude-Zahl. Sie stellen sicher, dass die relevanten Kräfteverhältnisse bei der Massstabsübertragung zwischen Modell und Original erhalten bleiben.

2.1 Reynolds-Zahl

Die Reynolds-Zahl (Re) ist eine der zentralen Kennzahlen der Strömungsmechanik und beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu viskosen Kräften in einer Strömung. Sie dient zur Unterscheidung zwischen laminarer und turbulenter Strömung und beeinflusst wesentlich den Energieeintrag, den Druckverlust und die Durchmischung im System. Mathematisch wird sie durch die Beziehung

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (1)$$

definiert, wobei ρ die Dichte, v eine charakteristische Geschwindigkeit, L eine charakteristische Länge und μ die dynamische Viskosität darstellen. In der Verfahrenstechnik ist die Reynolds-Zahl insbesondere bei Rohrströmungen, Rührbehältern und Fluidisierungen von Bedeutung. Eine korrekte Massstabsübertragung setzt voraus, dass die Reynolds-Zahl von Modell und Original identisch ist, um vergleichbare Strömungsregime zu gewährleisten.

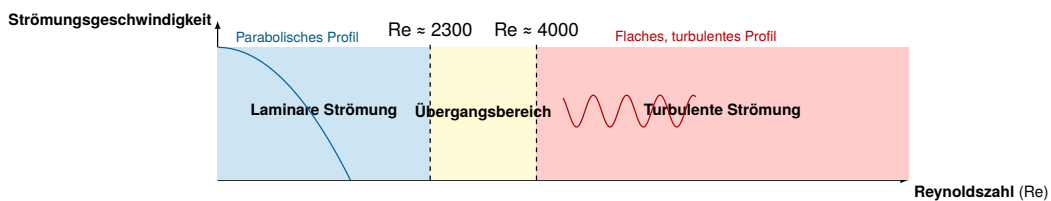


Abbildung 1. Schematische Darstellung der Reynoldszahl und der zugehörigen Strömungsregime. Blaue Zone: laminare Strömung ($Re < 2300$); gelbe Zone: Übergangsbereich; rote Zone: turbulente Strömung ($Re > 4000$).

2.2 Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl (Pr) verknüpft den Impuls- mit dem Wärmetransport in einem Fluid und spielt eine zentrale Rolle in der Wärmeübertragung. Sie beschreibt das Verhältnis der kinematischen Viskosität zur thermischen Diffusivität und wird wie folgt definiert:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (2)$$

wobei ν die kinematische Viskosität, α die thermische Diffusivität, c_p die spezifische Wärmekapazität, μ die dynamische Viskosität und λ die Wärmeleitfähigkeit des Fluids darstellen. Kleine Prandtl-Zahlen, wie bei Flüssigmetallen, deuten auf einen dominanten Wärmetransport hin, während grosse Werte, etwa bei Ölen, eine stärkere Impulsdiffusion anzeigen. Die Prandtl-Zahl bildet die Grundlage vieler Korrelationen für Wärmeübertragungsprozesse, beispielsweise bei der Bestimmung der Nusselt-Zahl. Für eine korrekte Massstabsübertragung von thermischen Prozessen muss die Prandtl-Zahl konstant gehalten werden, um ähnliche Temperaturfelder im Modell und in der Realität zu gewährleisten.

2.3 Froude-Zahl

Die Froude-Zahl (Fr) charakterisiert das Verhältnis von Trägheitskräften zu Schwerkraftkräften in einer Strömung. Sie ist insbesondere relevant für Strömungen mit freier Oberfläche, wie sie bei Rührbehältern, Überlaufvorgängen oder Kanälen vorkommen. Ihre Definition lautet:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} \quad (3)$$

wobei v die charakteristische Geschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung und L eine charakteristische Länge darstellen. Kleine Froude-Zahlen kennzeichnen Schwerkraft-dominierte Strömungen, während grosse Werte auf trägheitsgetriebene, turbulente Verhältnisse hinweisen. In der Ähnlichkeitstheorie ist die Froude-Zahl entscheidend, um die Dynamik freier Oberflächen korrekt zu skalieren. Wird sie bei der Massstabsübertragung vernachlässigt, können erhebliche Abweichungen im Energieeintrag, im Strömungsbild oder in der Wellenbildung auftreten.

2.4 Bedeutung für die Massstabsübertragung

Die simultane Erhaltung dieser dimensionslosen Kennzahlen ist in der Praxis selten vollständig möglich. Daher müssen Ingenieurinnen und Ingenieure Prioritäten setzen, welche Ähnlichkeitsbedingungen für einen bestimmten Prozess am wichtigsten sind. Für Strömungsvorgänge dominiert meist die Reynolds-Zahl, für thermische Prozesse die Prandtl-Zahl, und bei freien Oberflächen die Froude-Zahl. Die Kombination dieser Grössen bildet die Grundlage für eine physikalisch korrekte und praxisgerechte Massstabsübertragung in der Verfahrenstechnik.

Kennzahl	Bedeutung	Formel (vereinfacht)
Re	Reynolds-Zahl	$Re = \frac{uL}{\nu}$
Sc	Schmidt-Zahl	$Sc = \frac{\nu}{D}$
Sh	Sherwood-Zahl	$Sh = \frac{k_m L}{D}$
Pe	Péclet-Zahl	$Pe = Re Sc$
Eu	Euler-Zahl	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$
Fr	Froude-Zahl	$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$

Tabelle 1. Wichtige dimensionslose Kennzahlen in der Membrantechnik

3 Anwendung in der Membrantechnik

Auch in der Membrantechnik spielt die Ähnlichkeitstheorie eine zentrale Rolle bei der Beschreibung, Analyse und Skalierung von Transportprozessen. Strömungs-, Stoff- und Impulstransport sind immer miteinander gekoppelt.

Prozessgrösse	Bedeutung für den Prozess
Strömungsgeschwindigkeit	Bestimmt, wie schnell das Fluid durch die Anlage fliesst und beeinflusst Stofftransport und Durchmischung.
Membranfläche	Gibt an, wie gross die verfügbare Fläche für den Stofftransport ist. Eine grössere Fläche erlaubt einen höheren Durchsatz.
Volumenstrom	Steuert, wie viel Fluid pro Zeit transportiert wird und wie lange es sich im System aufhält.
Druckdifferenz über Membran	Ist die treibende Kraft für den Transport durch die Membran.
Temperatur	Beeinflusst die Viskosität des Fluids und die Geschwindigkeit der Diffusion.
Viskosität des Fluids	Bestimmt, wie stark das Fluid fließen kann und wie gross der Strömungswiderstand ist.
Stoffkonzentration	Legt fest, wie viel eines Stoffes im Fluid vorhanden ist und beeinflusst den Transport zur Membran.
Diffusionskoeffizient	Beschreibt, wie schnell sich Teilchen im Fluid verteilen.

Tabelle 2. Wichtige Prozessgrössen in der Membranfiltration

4 Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheit (SI)
Δp	Druckdifferenz	Pa
ΔT	Temperaturdifferenz	K
\dot{m}	Massenstrom	kg s^{-1}
\dot{Q}	Volumenstrom	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
γ	Scherzahl	s^{-1}
ρ	Dichte	kg m^{-3}
η	Dynamische Viskosität	Pa s
ν	Kinematische Viskosität	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
p	Druck	Pa
T	Temperatur	K
u	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit	m s^{-1}
V	Volumen	m^3
t	Zeit	s
g	Erdbeschleunigung	m s^{-2}

Tabelle 3. Wichtige Grössen und ihre Einheiten